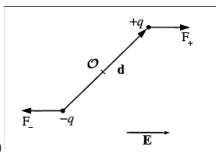


## 力のモーメント 電気双極子モーメント

- 磁気には磁荷が存在しない. 代わりに磁気モーメント  $\mathbf{m}$  は存在する. また (8.36) では電流同士に働く力が登場した. 実は,  $\mathbf{m}$  と  $I\mathbf{n}$  には等価な関係が導出されることが明らかになる.
- 力のモーメント  $\mathbf{N}$  電気双極子モーメント  $\mathbf{p}=q\mathbf{d}$  は電場  $\mathbf{E}$  を受けると, その場所で  $O$  の周りに回転し始める.  $\mathbf{p}$  の両端に大きさの等しい逆の力が働くからである. このような力を偶力といい, 回転のために働く作用の大きさを力のモーメント  $N$  で表す.  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{d}$  のなす角を  $\theta$  とする. 図の  $F_- (= -qE)$  が  $O$  の回りに  $\mathbf{p}$  を右まわりに回そうとする力のモーメントは正值と考えられ,  $qE$  と  $(d/2)\sin\theta$  の積で与えられる.  $(d/2)\sin\theta$  は  $O$  のまわりの,  $F_-$  の腕の長さと呼ばれ, 力  $F_-$  の延長線と  $O$  の最短距離である.  $F_+ (d/2)\sin\theta$  (右まわりに正值) の作用も加えて  $N$  は,  $=qE(d/2)\sin\theta + qE(d/2)\sin\theta = qEd\sin\theta$  であると分かる. 下線が洗練されていない.  $N$  をベクトルとしてしまい,  $\mathbf{N}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}$  とすれば済む.  $\mathbf{p}$  を仮に  $\mathbf{E}$  の向きまで回転させるときの回る向きを右回りとして,  $\mathbf{N}$  の向きは右ねじが進む向きである.



N0901

## 微分方程式の解法

- 今日の資料で, 大学基礎物理のための微分方程式の学習は一段落でよいと思われる. 2年生までは微分方程式が授業で登場すると思う. 始めに変数分離型を説明し, 最後に常数係数斉次型  $n$  階常微分方程式の解き方を紹介する. 非斉次型は後期に現れる.
- 変数分離型  $f(x)dx=g(y)dy$  に変形できるものは両辺が積分できれば解が求められる.  $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$  による変形にも注意.
- 一般解とは一般的な解である. 例えば力学の  $x(t)$  は newton 方程式より決められる. 以前,  $x=At^2+Bt+C^{*1}$  の形の結果があった. この場合  $x$  を 2 回時間微分すると加速度  $\alpha$  なので,  $A$  は  $mA=f$  より決められて, 残りの  $B$  と  $C$  が初期条件より定められるのである.  
初期条件を代入する前の  $x(t)$  の形 \*1 が一般解である.  
 $n$  階微分方程式の一般解は  $n$  個の (積分) 定数を含むと分かる.

N0903

## 力のモーメント モーターの原理 磁気モーメント

- 図 8.21 のように磁束密度  $\mathbf{B}$  を受けるとその場で回転する物体は, 磁気モーメント  $\mathbf{m}$  をもっていると考えられる. 先の議論のように,  $F$  (磁気力) より力のモーメント  $N$  を計算してみれば,  $\mathbf{m}$  の存在を認め易い. 図 8.21 のモーターのコイルの回転では偶力  $F=IbB$  が腕の長さ  $(a/2)\cos\varphi$  で働いている.  $\varphi$  はコイル面の水平からの傾き角とする. 従って  $N=BIabc\cos\varphi$ . 図 8.21 の回転より,  $\mathbf{N}$  は装置の回転軸手前から向こう側を向いている. ここで図 8.21 のコイル面を下から上に向かう単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を導入する (整流子とブラシのために  $\mathbf{n}$  が下を向かない事に注意).  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{B}$  のなす角  $\theta$  は  $\pi/2-\varphi=\theta$  であり,  $N=BIabs\sin\theta$  となるから,  $\mathbf{N}=(Iab\mathbf{n})\times\mathbf{B}$  と書くと, このベクトルは図 8.21 のコイルの回転の力のモーメントの大きさと向きを表現している. 以上の結果より  $\mathbf{N}=\frac{m}{\mu_0}\times\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{m}=\mu_0 Iab\mathbf{n}$  が結論される. もっと一般に, (面積  $S$  の平面の縁状の) ループ電流  $I$  は  $\mathbf{m}=\mu_0 IS\mathbf{n}$  の磁気モーメントと等価である. 電磁気学や力学では原子レベルの説明 (量子力学を用いた議論) には立ち入らないので  $\mathbf{m}$  でも  $I$  でも, どちらを源にして磁気現象を説明してもよい.

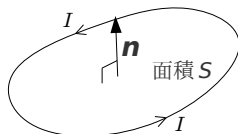


図: 閉じた電流の例

N0902

斉次形の定数係数常微分方程式(4)の一般解を簡単に導出する方法.

まず  $\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \dots (1)$  を解く. (1) を  $\left(\frac{d}{dt} - k\right)x(t) = 0 \dots (1')$  と書き

変える. (1') に  $x(t) = e^{kt}X(t) \dots (2)$  を代入.  $\left(\frac{d}{dt} - k\right)e^{kt}X = 0 \dots (1'')$ ,

$$e^{kt} \frac{dX}{dt} = 0, \quad X = c \text{ と変形できて } *1, \quad x(t) = ce^{kt} = c \exp(kt) \dots (2') \blacksquare$$

ついでに (1'') の変形より  $\left(\frac{d}{dt} - k\right)e^{kt}X(t) = e^{kt} \frac{d}{dt}X(t) \dots (3)$  と

$$\left(\frac{d}{dt} - k\right)^2 e^{kt}X(t) = \left(\frac{d}{dt} - k\right)e^{kt} \frac{dX}{dt} = e^{kt} \frac{d^2}{dt^2}X(t) \dots (3') \text{ も成立.}$$

さて,  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = 0 \dots (4)$  を係数  $1, a_1, a_0$  の 2 次方程式

式(根は  $k_1, k_2$ ) と思って因数分解し,  $\left(\frac{d}{dt} - k_1\right)\left(\frac{d}{dt} - k_2\right)x(t) = 0 \dots (4')^{*2}$ .

$\left(\frac{d}{dt} - k_2\right)x(t) = f(t) \dots (5)$  とおけば (4') は  $\left(\frac{d}{dt} - k_1\right)f = 0 \dots (4'')$  で, (1'~2') より  $f(t) = c \exp(k_1t) \dots (6)$  と分かる. 代入して (5) は  $\left(\frac{d}{dt} - k_2\right)x(t) = ce^{k_1t} \dots (5')$ . ここで (4') の  $k_1, k_2$  を入れ替えて

(5)(6)(5') と同じ事を行うと,  $\left(\frac{d}{dt} - k_1\right)x(t) = c'e^{k_2t} \dots (7)$  を得るの

で (5') - (7) より,  $x(t) = \frac{ce^{k_1t} - c'e^{k_2t}}{k_1 - k_2} \dots (8)$ . よって  $k_1 \neq k_2$  のとき,

$$x(t) = \frac{c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}}{k_1 - k_2} \dots (8'). \quad k_1 = k_2 = k \text{ の場合, } (2)(3') \text{ より } (4') \text{ は } \left(\frac{d}{dt} - k\right)^2 x(t) = 0, \quad e^{kt} \frac{d^2}{dt^2} X(t) = 0 \text{ と変形でき, } \underline{x(t) = (c_3 t + c_4) e^{kt}} \dots (9).$$

(8')(9) で一般解は全て得られた. ■

3 階常微分方程式も, 上記の方法で解くことができる\*3.

$k_1, k_2$  が複素数のとき,  $c_1, c_2$  も複素数で良い. オイラーの公式  $\exp(\pm i\theta) = \cos \theta \pm i \sin \theta \dots (10)$  を使う. (8') か (9) の計算の末,  $x(t)$  が実数なのか, 虚数でも良いのか, は何時も意識しておいて欲しい.

\*1 以下,  $c, c', c_1, c_2$  は任意の定数.

\*2  $-k_1 - k_2 = a_1, k_1 k_2 = a_0$  を満たす  $k_1, k_2$  について, (4)=(4') が確認できる. よって (4') の  $k_1, k_2$  を入れ替えた式  $\left(\frac{d}{dt} - k_2\right)\left(\frac{d}{dt} - k_1\right)x(t) = 0$  も, (4) と同じ式となるはず.

\*3 多分, 高階常微分方程式も当方法で導出可能. (4') のように素因子分解ができる場合は.

## 入門レポート問題 説明に必要な量は自分で定義し、全て、系または系の具体例を座標と共に図示せよ

○3章7改題。地球Eの周りを半径 $R$ の円軌道で衛星Sが回転している。Sの自転は考えず、S上に固定した座標をS系座標と呼ぶ。Eにも同様にE系座標を導入するが、E系は静止系とする。座標系を図示した上で、E系かS系の上でSの運動方程式を導出せよ(E系における答えは、4章9の問いの[]内を参考にせよ)。SがEを一周する時間 $T(R)$ の式を導出せよ。p.23例題2で用いている数値より、質量 $1t$ のSに働く万有引力の大きさと $T$ の値も求めよ。5点

○3章8改題。静止した物体に別の物体が正面から弾性衝突した後の運動(両物体の速度)を導出せよ。ヒントは、wikipedia "弾性衝突"に入り、動画の解法を参考にする(動画の論旨: 運動量保存則(1)と運動エネルギー保存則(2)の2本の式を書き、今回は $u_2=0$ 。 $u_1$ が既知、 $v_1$ 、 $v_2$ が未知数。よって解けるけれど面倒。(2)に $2/m_1$ をかけて $u_1^2=...$ にして、(1)を $m_1$ で割って $u_1=...$ の式にして、代入。 $v_1=v_2=0$ の解を排除すると解 $u_1=$ 、 $v_2=$ を得る)。成り立つことが明らかな式変形の過程は一々示さなくても良いが、初めての式を設定した理由は完全にレポートする。4点

○4章2。モーターの仕事率 $P$ を0.50馬力、吊り上げる一定の力と速さを $f$ と $v$ として、 $P=fv$ の関係を簡単に導入してから数値を答える。単位と有効数字に気をつけて。3点

○4章6。位置エネルギー $U$ の式は、物体の受ける力をもとにして導出する。3点

○4章9。[図4.10の質点の軌道が円軌道でない場合、物体に働く力は向心力(Oに向かう向心方向の力)ではない。円軌道上では向心力が働き、物体の加速度はOを向き、その大きさは $v^2/R$ である。このとき向心力は、向心方向の運動方程式より $mv^2/R$ に等しくなる。]この問いで $\theta=0$ で宙に飛び出すとき、向心力ではないのでp57例題7の式(b)は成立しない。その場合に(c)の結果の導出は書かれていない。以上を踏まえて、答えを得るまでの導出をすべて報告する。4点

◎8章4改題。 $\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} = r \Delta r$ を証明し、式(4.6')を用いて任意の点Pにおける電位 $V(r)$ の式(生命の式(3-8))を導出する。 $V(r)$ と図8.35より、p127例題5を参考に等電位面を描く。4点

◎8章12。電流 $I_2$ 上の磁場の向きを導出する。7点

$\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} = r \Delta r$ の考え方

$\Delta f(x)$ を $\Delta x$ で表す  $f(x + \Delta x) - f(x)$ を $\Delta x$ で表す  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Delta x$ を $\Delta x$ で表す

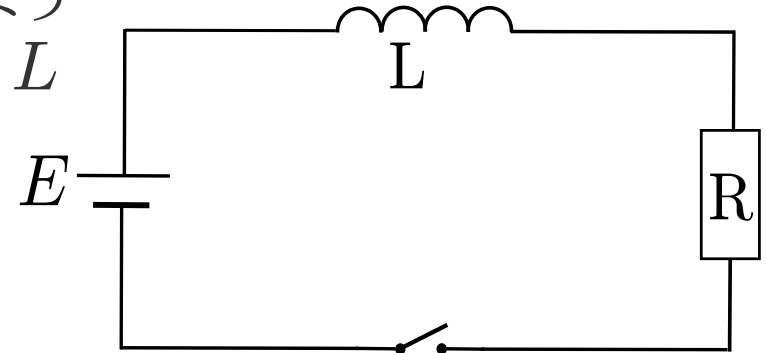
1. 一般的処方

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x) \Delta x + f''(x) \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \\ &= f(x) + f'(x) \Delta x + o(\Delta x) \quad \left( \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0 \text{ for } \Delta x \rightarrow 0 \right) \\ f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) + f'(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r} + o(\Delta \mathbf{r}) \end{aligned}$$

2. 微分の定義まで戻る

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}, \quad (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} \\ &= 2\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} + (\Delta \mathbf{r})^2. \\ g(r) &= r^2, \quad (r + \Delta r)(r + \Delta r) - r^2 = 2r\Delta r + (\Delta r)^2. \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} &= r^2 \text{ より、} \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} = r\Delta r. \end{aligned}$$

演習入門:LR 回路の過渡現象 図のように起電力  $E$  の電池, 自己インダクタンス  $L$  のコイル  $L$ , 抵抗値  $R$  の抵抗  $R$  がある.



- 電流  $I$  の向きを図示して  
電位差  $V_L(t)$ ,  $V_R(t)$  を定義せよ.
- スイッチを入れた直後の  $I(0)$ ,  $V_L(0)$ ,  $V_R(0)$  をそれぞれ求めよ.  
A. 第2法則より  $E - V_L(0) - V_R(0) = 0$ . コイルには電流を一定に保とうとする性質があるので (力学の質量  $m$  の働き.  $I$  は速度),  $I(0) = 0$ . オームの法則より  $V_R(0) = RI(0) = 0$ ,  $V_L(0) = E$ .
- $t \rightarrow \infty$  での  $I(\infty)$ ,  $V_L(\infty)$ ,  $V_R(\infty)$  をそれぞれ求めよ.  
A. (質量  $m$  の物体が重力の下で速度に比例する抵抗を受けるとき速度は一定になり, )  $I$  は一定になり,  $LdI/dt = 0$  より  $V_L(\infty) = 0$ .  
第2法則より  $E - V_L(\infty) - V_R(\infty) = 0$ ,  $V_R(\infty) = E$ .
- $I(t)$  の微分方程式を書け.  
H. 同じく  $E - V_L(t) - V_R(t) = 0$ .  $V_L(t)$  と  $V_R(t)$  を  $I(t)$  で書く.
- $I(t)$  と  $V_L(t)$  を求めよ.