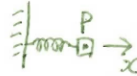


## §3.4

- 1 前提: 自然長  $l$  のばねの片方の端を壁に固定し(座標原点  $O$ ),  
 2 ばねの他端に質量  $m$  の小物体をつけて, その点を  $P$  とする.  
 3  $OP = l$  のとき, ばねの伸びは  $l - l$ .  $OP$  の向きは  
 4  $(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l})$  なので, 小物体が受けるばねの力  $\mathbf{F}$  は,  
 5  $\mathbf{F} = -k \frac{l-l}{l} (x, y, z)$ .  $k$  はばね定数である.



- 6 今,  $P$  の運動は  $x$  軸上に限られるとすると,  $l = x$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .  
 7 したがって,  $\mathbf{F} = -k \frac{x-l}{x} (x, 0, 0)$ .  
 8 改めて, ばねが自然長のときの  $P$  を  $O$  とおくと, 運動方程式は,  
 9  $ax = -\frac{k}{m}x$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ . (3.14')

- 10  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ ,  $(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{k}{m})x = 0$ ,  $(\frac{d}{dt} - i\sqrt{\frac{k}{m}})(\frac{d}{dt} + i\sqrt{\frac{k}{m}})x = 0$ .  
 11 n09 の演算子法の解法より,  $x(t)$  の一般解は,  
 12  $x(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ ,  $C_1, C_2$  は任意の複素数定数.  
 13  $x(0) = x_0$  (図 3.8,  $x_0 > 0$ ) とすると,  $C_1 + C_2 = a + ib + c + id = a + c = x_0$ ,  
 14  $b + d = 0$  ( $a, b, c, d$  は実定数). また,  $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$  (オイラーの公式)  
 15 より,  $x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t - 2b \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$ .  $A = \sqrt{x_0^2 + 4b^2}$ ,  $\tan \alpha = \frac{-2b}{x_0}$   
 16 の変換を行うと,  $x(t) = A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha)$ .

- 17  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  を  $\omega$  と書くと, 解は,  $x = A \sin(\omega t + \alpha)$  (3.15').  
 18  $t$  を  $\frac{2\pi}{\omega}$  進めても不変なので,  $x(t)$  は  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  (3.16') の周期をもつ.  
 19  $v(t) = A \omega \cos(\omega t + \alpha)$  (3.17'),  
 20  $a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$ .

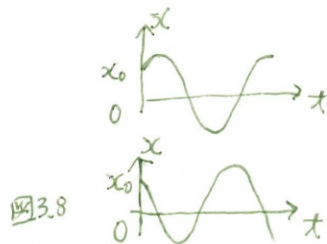


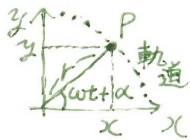
図 3.8

- 12'  $x(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ .  
 13a'  $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$  より,  $x(t) = (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$   
 13b'  $= (a + ib) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + i(c + id) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$ .  
 14a' 微分より  $v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}(a + ib) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + i\sqrt{\frac{k}{m}}(c + id) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$ .  
 14b' また,  $x(0) = (a + ib) = \text{実数}$  より,  $b = 0$ ,  $a = x(0)$ .  
 15a'  $v(0) = i\sqrt{\frac{k}{m}}(c + id) = \text{実数}$  より,  $c = 0$ ,  $-d = v(0)/\sqrt{\frac{k}{m}}$ .  
 15b' よって  $x(t) = x(0) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + \left(v(0)/\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$ .  
 16a' 単振動の合成より,  $x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$ .  
 16b' ただし  $A = \sqrt{x(0)^2 + \left(v(0)/\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}$ ,  $\tan \alpha = \left(v(0)/\sqrt{\frac{k}{m}}\right)/x(0)$ .

# §3.6

- 1 実質は、(束縛運動でない) 等速円運動(半径  $r$ ) は、広く
- 2  $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ ,  $f(r) > 0$ .
- 3 のときに走り回り得る。右辺の力を中心力という。中心力下では物体の運動
- 4 は平面上で起こる。今はこれを  $z=0$  の面とする。例えば万有引力下の物体
- 5 は直線、円、放物線、双曲線の軌道のどれかになる。

- 6  $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = -\frac{f(r)}{r}(x, y)$ ,  $z=0$ , ただし  $v$  = 一定,  $r$  = 一定.
- 7  $\frac{dx}{dt} = -\frac{f(r)}{r} x$  が解ければよい。しかし上の行より,  $\frac{f(r)}{r} = \omega^2(r) = \text{一定}$  とし,
- 8 単振動の解法となるから,  $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$  (a).
- 9  $x, y$  面の図にすると,  $A=r$ ,  $y=r \sin(\omega t + \alpha)$  (b).
- 10 (a) も (b) も単振動の解である。つまり,  $x^2 + y^2 + z^2$  を満たす。



- 11  $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (-r\omega \sin(\omega t + \alpha), r\omega \cos(\omega t + \alpha))$
- 12  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega$ . ( $\omega = \omega(t)$ ) (3.28)
- 13  $\mathbf{a} = (a_x, a_y) = -\omega^2(r \cos(\omega t + \alpha), r \sin(\omega t + \alpha)) = -\omega^2(x, y)$ .
- 14  $a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$ . ( $v = v(t)$ ,  $\omega = \omega(t)$ .)

- 15 (曲線運動)  $\frac{1}{r(t)}$  の向心力  $f(r) = ma = m \frac{v^2}{r}$  (3.29).

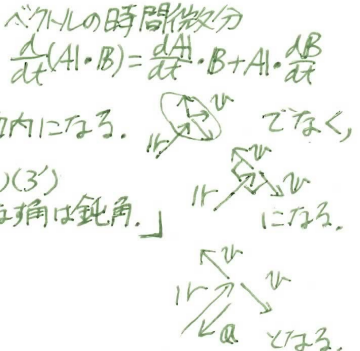
- 16 例: (3.30) は  $f(r) = \frac{GMm}{r^2}$  のとき.

- 17 図 3.17 は、円の円運動を上側と右側から照らすと、 $x$  軸の単振動 (a)
- 18 と  $y$  軸の単振動 (b) に射影される。という事実を図示している。 §3.6

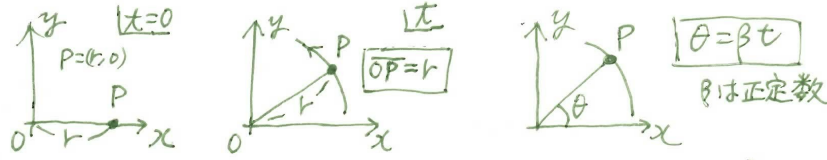
- 19 P.32 最後. 加速度  $\mathbf{a}$  をもつ系 (S の中に原点, E を原点にとった座標 O'
- 20 から見た物体) では, それだけで  $\mathbf{a}$  の加速度を受ける。
- 21 O' の運動方程式は,  $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$  でなく,
- 22  $m\mathbf{a}' = \mathbf{f} - m\mathbf{a}$  に変える。
- 23 この  $-m\mathbf{a}$  を慣性力という。曲線運動の場合, 特にみかけの力を
- 24 遠心力という。等速円運動では, 向心力和遠心力は釣り合っている (無重力)。

- 15 別 i) 束縛力なしの円運動 (等速付き) ベクトルの解。

- 26  $r = \text{一定}$  より  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = \text{一定} \dots (1)$
- 27 (1) より  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0 \dots (2)$
- 28  $\mathbf{r}$  の運動は平面内で起こる。  $\mathbf{v}$  も平面内になる。
- 29 (2) より,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = -v^2 \dots (3) (3')$
- 30 等速 ( $v$  一定) の条件をつけると,
- 31  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = \text{一定} \dots (4)$
- 32 (4) より  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ .  $\mathbf{v}$  が平面内故,  $\mathbf{a}$  も平面内。
- 33 (3') より,  $\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}$ .



- 14 別 ii)



- 35  $\mathbf{r} = (x, y) = (r \cos \beta t, r \sin \beta t)$ .
- 36  $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = \omega (-r \sin \beta t, r \cos \beta t)$ . ←  $\mathbf{r}$  を  $+90^\circ$  した結果.
- 37  $\beta = \omega$  とし,
- 38  $\mathbf{a} = (a_x, a_y) = -\omega^2 (r \cos \omega t, r \sin \omega t) = -\omega^2 \mathbf{r}$ .

